Space monomial curve によって定まる Rees 環について(Blow-up ringsの環論的研究)

AUTHOR(S):

中村, 幸男

数理解析研究所講究録
第801巻 1992年 134-143

Space monomial curve によって定まる Rees 環について

東京都立大学　中村幸男 (Yukio Nakamura)

1 序

以下、k は体、$\mathbb{Z} \ni l > m > n > 0$ は $\gcd(l,m,n) = 1$ であるものとする。Affine space monomial curve $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{A}^3 \mid x = u^l, y = u^m, z = u^n\}$ の定義イデアルを p としたとき、p の Rees 環 $R(p) = \sum_{i \geq 0} p^i t^i \subset A[t]$ (t は A 上の不定元) は complete intersection であることが知られている。それでは C の projective closure $\overline{C}$ をとり、$\overline{C}$ の定義イデアルを P としたとき、Rees 環 $R(P)$ の性質はどうかという問いも考えられるであろう。本稿はそれについて少し解ったことを報告させてもらうものである。

$A = k[X,Y,Z]$, $k[U]$ を多項式環とし k-algebra map $\varphi : A \to k[U]$ を$\varphi(X) = U^l$, $\varphi(Y) = U^m$, $\varphi(Z) = U^n$ で定め、$p(l,m,n) = \mathrm{Ker}\,\varphi$ とおく。このとき curve C の定義イデアルは $p = p(l,m,n)$ で与えられる。また、多項式環の間の k-algebra map $\Phi : B = k[X,Y,Z,W] \to k[U,V]$ を$\Phi(X) = U^l$, $\Phi(Y) = U^m V^{l-m}$, $\Phi(Z) = U^n V^{l-n}$, $\Phi(W) = V^l$ で定めれば $\overline{C}$ の定義イデアルは $P = P(l,m,n) = \mathrm{Ker}\,\Phi$ で与えられ、そして P は p を斉次化したイデアル、つまり $P = ({}^h f \mid f \in p)$, となることがいえる。ここで、$f$ の斉次化 ${}^h f$ とは、$f = f(X,Y,Z)$ に対して

$${}^h f = W^{\deg f} f(X/W, Y/W, Z/W) \ \ (\deg \text{ は total degree})$$

として定まるものである。Rees 環 $R(P)$ を知るにはまず P について議論していかねばならないのだが、P の生成系については Gröbner 基底の概念が有効であり、それについて準備をすることから始める。

以下、A の monomial $X^{a_1} Y^{a_2} Z^{a_3}$ には X, Y, Z の順序で graded な逆辞書式順序 $\succ$ による monomial ordering を入れることにする。これは

$$
\begin{aligned}
&X^{a_1}Y^{a_2}Z^{a_3} \succ X^{b_1}Y^{b_2}Z^{b_3} \\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} a_1+a_2+a_3 > b_1+b_2+b_3, & or \\ a_1+a_2+a_3 = b_1+b_2+b_3 \text{ かつ } i_0 = \min\{i \mid a_i \neq b_i\} \text{ に対し } a_{i_0} < b_{i_0} \end{cases}
\end{aligned}
$$

で定義されるものである。$A \ni f \neq 0$ に対し f の initial term (f の中の最大の monomial で係数を 1 にとったもの) を $\mathrm{in}(f)$ で表しイデアル $I \subset A$ に対して $\mathrm{in}(I) = (\mathrm{in}(f) \mid f \in I)$ と表すことにする。このとき I の Gröbner 基底とは I の元 $f_1, f_2, ..., f_t$ で $\mathrm{in}(I) = (\mathrm{in}(f_1), \mathrm{in}(f_2), ..., \mathrm{in}(f_t))$ を充すもののことである。

今、monomial ordering が graded な逆辞書式順序で入っていることから $p = p(l, m, n)$ の Gröbner 基底を斉次化すると $P = P(l, m, n)$ の Gröbner 基底となることが確かめられる。また一般に Gröbner 基底はイデアルの生成系をなすことから、こうして P の生成系を得ることができる。そこで第 2 節ではイデアル $\mathrm{in}(p)$ の生成系について議論したいと思う。

$\mathrm{in}(p)$ の極小生成元の個数を $\mu(\mathrm{in}(p))$ で書くことにする。上で見たように $\mathrm{in}(p)$ の性質は P に影響を及ぼすものであり、例えば$\mu(\mathrm{in}(p)) \leq 3$ のときは B/P は Cohen-Macaulay 環であり、$R(P)$ は complete intersection となることが知られている。それでは $\mu(\mathrm{in}(p)) = 4$ のときはどうなるかということについて次の結果が得られた。

定理 1.1 *$p = p(l, m, n)$, $P = P(l, m, n)$ とする。$\mu(\mathrm{in}(p)) = 4$ のとき、$R(P)$ は Gorenstein 環である。*

この定理の証明は第 3 節で述べられる。

2 initial term で生成されるイデアル

群準同型写像 $\rho : \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}$ を $\rho(a, b, c) = la + mb + nc$ で定める。また、$\mathbb{Z}^3 \ni v$ を成分の正負で分け $v = v^+ - v^-$ と書き表すことにし、A の binomial F_v を $F_v = \mathbb{X}^{v^+} - \mathbb{X}^{v^-}$ とおくことにする。一方 Herzog [2] によればイデアル $p = p(l, m, n)$ の生成系は

$$
p = I_2 \begin{pmatrix} X^{a_1} & Y^{b_1} & Z^{c_1} \\ Y^{b_2} & Z^{c_2} & X^{a_2} \end{pmatrix}
$$

と書き表すことができるので、$u_1 = (-a_1 - a_2, b_2, c_1)$, $u_2 = (a_2, b_1, -c_1 - c_2)$ とおけば、$u_1, u_2 \in \mathrm{Ker}\,\rho$ ではあるが、実は次が成り立つ。

補題 2.1 *([2])* $\mathrm{Ker}\,\rho = < u_1, u_2 >$

証明　$u_3 = u_1 + u_2 = (-a_1, b_1 + b_2, -c_2)$ とおけば $p = (F_{u_1}, F_{u_2}, F_{u_3})$ となることに注意しておく。$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ とおき$\lambda^* := \rho|_{\mathbb{N}^3} : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ とすれば λ^* は半群環間の準同型であり$\lambda = \{(u, v) \in \mathbb{N}^3 \times \mathbb{N}^3 | \lambda^*(u) = \lambda^*(v)\}$ は congruence となる (定義は [2] を見よ)。$\sigma = \{(u_i^+, u_i^-) \mid i = 1, 2, 3\}$ に対して σ を含む最小の congruence を $\overline{\sigma}$ で書くことにすれば、[2, Proposition 1.5] により $\overline{\sigma} = \lambda$ が成り立つ。一般に $\overline{\sigma}$ の構成方法より $\mathbb{Z}^3$ の部分群として

$$< u - v \mid (u, v) \in \sigma > = < u - v \mid (u, v) \in \overline{\sigma} >$$

が成り立つので、

$$\mathrm{Ker}\,\rho \;=\; \{u - v \mid (u, v) \in \lambda\} \;= < u_1, u_2, u_3 > = < u_1, u_2 >$$

を得る。□

前節で $\mathrm{in}(p)$ は $\{\mathrm{in}(f) | f \in p\}$ で生成されるイデアルのことと定義したのだが、実は $\mathrm{in}(p) = (\mathrm{in}(F_v) | v \in \mathrm{Ker}\,\rho)$ であることが容易に確かめらる。従って 補題 2.1 より $\mathrm{in}(p) = (\mathrm{in}(F_v) \mid v = iu_1 + ju_2,\ i, j \in \mathbb{Z})$ となる。以下、$\mathbb{Z}^3 \ni v$ を $v = (v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)})$ で成分表示することにし、$|v| = v^{(1)} + v^{(2)} + v^{(3)}$ と書くことにする。するとこのとき $l > m > n$ であることから $|u_1| > 0$, $|u_2| < 0$ が確かめられる。さらに

補題 2.2　$(a_1 + a_2)/a_2 \;>\; -|u_1|/|u_2| \;>\; c_1/(c_1 + c_2).$

証明　$\hat{A}/p\hat{A}$ は 1 次元 Cohen-Macaulay 環であるから、

$$l = e_X(\hat{A}/p\hat{A}) = \ell_{\hat{A}}(\hat{A}/(p\hat{A} + (X))) = b_1c_1 + b_2c_1 + b_2c_2,$$

となる。同様にして $m = a_1c_1 + a_1c_2 + a_2c_2,\ \ n = a_1b_1 + a_2b_1 + a_2b_2$ が得られる。よって、

$$\begin{aligned} & (a_1 + a_2)/a_2 \;+\; |u_1|/|u_2| \\ = \;& [(a_1b_1 + a_2b_1 + a_2b_2) - (a_1c_1 + a_1c_2 + a_2c_2)]/a_2|u_2| \\ = \;& (n - m)/a_2|u_2| \;>\; 0 \end{aligned}$$

を得る。次の不等式も同様である。□

$\mathrm{in}(p)$ の生成系を記述するのがこの節の目標であるのだが、そのために次の定義を与える。

$$i_k = \min\{i \in \mathbb{Z} \mid -|u_2|k \le |u_1|i\}, \quad k = 1, 2, ...$$

$$t = \min\{\mathbb{Z} \ni k > 0 \mid (c_1 + c_2)i_k \ge c_1k\}$$

また、$\mathrm{Ker}\,\rho$ の元 $v = iu_1 + ju_2$ を単に $v = (i, j)$ で表すことにする。

命題 2.3

$$\mathrm{in}(p) = \left(\mathrm{in}(F_v) \;\middle|\; \begin{array}{rlll} v & = & (1,0) & \\ & = & (i,1) & 0 \le i \le i_1 \\ & = & (i_k,k) & 2 \le k \le t \\ & = & (i_k-1,k) & i_k - i_{k-1} \ge 2 \text{ かつ } 2 \le k \le |u_1| \end{array} \right)$$

証明 $v = iu_1 + ju_2$ に対して、$v^{(1)} = -i(a_1+a_2)+ja_2$, $v^{(2)} = ib_2+jb_1$, $v^{(3)} = ic_1 - j(c_1+c_2)$, $|v| = i|u_1| + j|u_2|$ となっていることを注意しておく。$\mathbb{Z}^2$ の部分集合 D_1, D_2, D_3, D_4 を次の様に定める。

$$\begin{aligned} D_1 = &\ \{(0,0) \neq (i,j) \in \mathbb{Z}^2 \mid\ ib_2 + jb_1 \ge 0,\ -i(a_1+a_2) + ja_2 \ge 0\} \\ D_2 = &\ \{(0,0) \neq (i,j) \in \mathbb{Z}^2 \mid\ -i(a_1+a_2) + ja_2 < 0,\ i|u_1| + j|u_2| < 0\} \\ D_3 = &\ \{(0,0) \neq (i,j) \in \mathbb{Z}^2 \mid\ i|u_1| + j|u_2| \ge 0,\ ic_1 - j(c_1+c_2) \le 0\} \\ D_4 = &\ \{(0,0) \neq (i,j) \in \mathbb{Z}^2 \mid\ ic_1 - j(c_1+c_2) > 0,\ ib_2 + jb_1 > 0\} \end{aligned}$$

このとき、補題 2.2 より各 D_i $(i = 1,2,3,4)$ は空でなく、また共通部分を持たぬことがわかる。さらに $F_{-v} = -F_v$ であることから結局

$$\mathrm{in}(p) = (\mathrm{in}(F_v) \mid v \in D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4)$$

を得る。そこで v が D_1, D_2, D_3, D_4 のどれに含まれるかで場合分けして考えることにする。

(I) $v \in D_1$ のとき $v^{(1)} \ge 0, v^{(2)} \ge 0, v^{(3)} < 0, |v| < 0$ なので $\mathrm{in}(F_v) = \mathbb{X}^{v^-} = Z^{j(c_1+c_2)-ic_1}$ であり、$\min\{j(c_1+c_2) - ic_1 \mid (i,j) \in D_1\}$ の値は $(i,j) = (0,1)$ または $(1,1)$ のときに与えられるので

$$(\mathrm{in}(F_v) \mid v \in D_1) \subset (\mathrm{in}(F_{(0,1)}), \mathrm{in}(F_{(1,1)}))$$

(II) i_k 及び t の定め方から次が成り立つことが確かめられる。

$$\{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \le i < i_t,\ j \ge 0\} \cap D_3 = \emptyset$$

$$\{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \le i,\ 0 \le j < t\} \cap D_3 = \emptyset$$

$v \in D_3$ とすると $v^{(1)} < 0$, $v^{(2)} > 0$, $v^{(3)} \le 0$, $|v| \ge 0$ なので $\mathrm{in}(F_v) = Y^{ib_2+jb_1}$, また $\min\{ib_2 + jb_1 \mid (i,j) \in D_3\} = i_tb_2 + tb_1$ となるので

$$(\mathrm{in}(F_v) \mid v \in D_3) \subset (\mathrm{in}(F_{(i_t,t)}))$$

(III) $v \in D_4$ では $\mathrm{in}(F_v) = Y^{ib_2+jb_1} Z^{ic_1-j(c_1+c_2)}$ そこで D_4 の部分集合 C_1, C_2, C_3 を次の様に定める。

$$\begin{array}{rcl} C_1 &=& \{(i,j)\in D_4 \mid (i-i_t)b_2+(j-t)b_1 \geq 0\} \\ C_2 &=& \{(i,j)\in D_4 \mid j<0\} \\ C_3 &=& \{(i,j)\in D_4 \mid (i-1)b_2+jb_1\geq 0,\ (i-1)c_1-j(c_1+c_2)\geq 0\} \end{array}$$

すると $D_4 = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \{(i_k,k) \mid 1 \leq k \leq t-1\}$ となる。$v \in C_1$ ならば $\mathrm{in}(F_v)$ の Y のべきをみて $\mathrm{in}(F_v) \in (\mathrm{in}(F_{(i_t,t)}))$ となることがわかり、同様にして $(\mathrm{in}(F_v) \mid v \in C_2) \subset (\mathrm{in}(F_{(0,1)}))$ と $(\mathrm{in}(F_v) \mid v \in C_3) \subset (\mathrm{in}(F_{(1,0)}))$ がわかるので、結局

$$(\mathrm{in}(F_v) \mid v \in D_4) \subset (\mathrm{in}(F_v) \mid v=(0,1),(1,0),(i_k,k)\ \ 1\leq k\leq t)$$

を得る。

(VI) $v \in D_2$ については $\mathrm{in}(F_v) = X^{i(a_1+a_2)-ja_2}Z^{j(c_1+c_2)-ic_1}$ となっており、D_2 の部分集合 E_0 を

$$E_0 = \{(i,j)\in D_2 \mid (j-1)(c_1+c_2)-ic_1\geq 0\}$$

とおくと、$(\mathrm{in}(F_v) \mid v \in E_0) \subset (\mathrm{in}(F_{(0,1)}))$ がいえる。もし $|u_1|+|u_2| \geq 0$ なら $D_2 = E_0$ なので証明は終わる。

以下、$|u_1|+|u_2|<0$ とする。このとき $1<i_1<i_2<\ldots$ である。D_2 の部分集合 E_1, E_2, ..., E_{i_1-1} を

$$E_r = \{(i,j)\in D_2 \mid (j-1)(c_1+c_2)-(i-r)c_1\geq 0,\ (i-r)(a_1+a_2)-(j-1)a_2\geq 0\}$$

で定める。すると

$$(\mathrm{in}(F_v) \mid v\in E_r) \subset (\mathrm{in}(F_{(1,r)})),\quad r=1,2,\ldots,i_1-1$$

となるので、あとは $v \in D_2 \setminus \bigcup_{r=0}^{i_1-1} E_r$ となるものについて調べれば充分である。

$v \in D_2 \setminus \bigcup_{r=0}^{i_1-1} E_r$ ととれば $v=(i_k-1,k)$ (但し $k\geq 2$) の形をしており、もし $i_k-1=i_{k-1}$ ならば $(i_k-1,k)\in E_{k-1}$ となる。一方で、もし $k>|u_1|$ ならば $v'=(i_k-1+|u_2|,k-|u_1|)\in D_2$ であり $\mathrm{in}(F_v)\in(\mathrm{in}(F_{v'}))$. 故に、

$$(\mathrm{in}(F_v) \mid v\in D_2) \subset \left(\mathrm{in}(F_v) \,\middle|\, \begin{array}{l} v\in E_r,\ 0\leq r\leq i_1-1 \\ v=(i_k-1,k),\ \text{但し } i_k-i_{k-1}\geq 2 \text{ かつ } 2\leq k\leq |u_1| \end{array}\right).$$

□

一般に space monomial curve の定義イデアル p に対して、

$$p = I_2(M),\quad M = \begin{pmatrix} X^{a_1} & Y^{b_1} & Z^{c_1} \\ Y^{b_2} & Z^{c_2} & X^{a_2} \end{pmatrix}$$

となる行列 M は一意的に定まるとは限らない。例えば、$p = p(15, 10, 6) = (X^2 - Y^3, X^2 - Z^5)$ に対しては

$$\begin{pmatrix} X^2 & Y^0 & Z^5 \\ Y^3 & Z^0 & X^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} X^0 & Y^3 & Z^5 \\ Y^0 & Z^5 & X^2 \end{pmatrix}$$

などがとれたりする。しかしながら次のことはいえる。

補題 2.4 $\mu(\mathrm{in}(p)) \geq 3$ とする。このとき行列 M は $a_1, b_2, c_1, c_2 > 0$ となるものでとることができる。

この証明は場合わけをして、与えられた p から行列 M をつくる手順を追っていくことによって得られるのだが、routine work であるので省略する。

命題 2.3 の系として $\mu(\mathrm{in}(p))$ の上限が次の様に与えられることがいえる。この評価は best possible であり、また、第一節で述べたように projectiv space monomial curve の定義イデアル $P(l, m, n)$ の生成元の個数の評価でもある。

系 2.5 $\mu(\mathrm{in}(p(l, m, n))) \ \leq \ l - n + 1$

証明

$\mu(\mathrm{in}(p)) \leq 2$ のときは常に成り立つので、$\mu(\mathrm{in}(p)) \geq 3$ と仮定し、行列 M は補題 2.4 を充すようにとったものとする。この時 $c_1 + c_2 > c_1$ であることから、前に定めた記号 i_k について、$i_1 < i_2 < \ldots$ が成り立つ。今、

$$\begin{aligned} &\#\{(i,1) \mid 1 \leq i \leq i_1\} \ + \ \#\{(i_k, k) \mid 2 \leq k \leq t\} \\ &+ \ \#\{(i_k - 1, k) \mid i_k - i_{k-1} \geq 2, \ 2 \leq k \leq t\} \ \leq \ i_t \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} &\#\{(1,0),(0,1)\} \ + \ \#\{(i_k - 1, k) \mid t + 1 \leq k \leq |u_1|\} \\ &= \ 2 + |u_1| - t \ \leq \ 2 + i_{|u_1|} - i_t \end{aligned}$$

ここで定義より $i_{|u_1|} = -|u_2|$ であることから、$\mu(\mathrm{in}(p)) \leq 2 - |u_2|$ を得る。また、$F_{(1,1)} = Y^{b_1+b_2} - X^{a_1}Z^{c_2}$ が p の元であることから、もし $b_1 = 0$ ならば $b_2 \geq 2$ がいえる。これは $1 - |u_2| \leq b_1|u_1| - b_2|u_2|$ を意味しており、従って

$$\begin{aligned} \mu(\mathrm{in}(p)) \ &\leq \ 1 + b_1|u_1| - b_2|u_2| \\ &= \ 1 + (b_1c_1 + b_2c_1 + b_2c_2) - (a_1b_1 + a_2b_1 + a_2b_2). \end{aligned}$$

補題 2.2 で見たように

$$l = b_1c_1 + b_2c_1 + b_2c_2, \quad n = a_1b_1 + a_2b_1 + a_2b_2$$

であるから主張は示される。□

最後に次の系を示してこの節を終わりにする。

系 2.6 もし $\mu(\mathrm{in}(p)) = 4$ ならば、$t = 1,\ i_1 = 2$ である。

証明 p を表す行列 M は $a_1, b_2, c_1, c_2 > 0$ であるものととる。命題 2.3 で求めた $(\mathrm{in}(p))$ の生成元のうち Y と Z が現れて X のでてこないものは $v \in D_1 \cup D_3 \cup D_4$ のときで

$$\begin{array}{ll} \mathrm{in}(F_{(0,1)}) = Z^{c_1+c_2} & \mathrm{in}(F_{(1,0)}) = Y^{b_2}Z^{c_1} \\ \mathrm{in}(F_{(i_t,t)}) = Y^{i_tb_2+tb_1} & \mathrm{in}(F_{(i_k,k)}) = Y^{i_kb_2+kb_1}Z^{i_kc_1-k(c_1+c_2)}\ (1 \le k \le t-1) \end{array}$$

これらは Y のべきは真増大し、Z のべきについては

$$c_1 + c_2 \quad > \quad c_1 \quad > \quad i_1c_1 - (c_1 + c_2) \quad > \quad 0$$

となっているので $F_{(0,1)}$, $F_{(1,0)}$, $F_{(i_1,1)}$, $F_{(i_t,t)}$ ($t = 1$ のときは $F_{(i_1,1)} = F_{(i_t,t)}$) は $\mathrm{in}(p)$ の極小生成系の一部となる。X のでてくる生成元については $v \in D_2$ のときで

$$\begin{array}{l} F_{(i,1)} = X^{i(a_1+a_2)-a_2}Z^{(c_1+c_2)-ic_1} \ (1 \le i \le i_1 - 1), \\ F_{(i_k-1,k)} = X^{(i_k-1)(a_1+a_2)-ka_2}Z^{k(c_1+c_2)-(i_k-1)c_1} \ (k \ge 2) \end{array}$$

となっており、$\{F_{(i,1)}\}$ についてみると X のべきは真増大、Z のべきは真減少している。$F_{(i_k-1,k)}$ については

$$(i_k - 1)(a_1 + a_2) - ka_2 \quad > \quad (i_1 - 1)(a_1 + a_2) - a_2 \quad (k \ge 2)$$

となることから $\{F_{(i,1)} \mid 1 \le i \le i_1 - 1\}$ は $\mathrm{in}(p)$ の極小生成系の一部となる。これらのことから$\mu(\mathrm{in}(p)) = 4$ のとき $t = 1,\ i_1 = 2$ がでる。□

3 Rees 環の Gorenstein 性

$B = k[X, Y, Z, W]$ と $k[U, V]$ は体 k 上の多項式環とし、k-algebra map $\Phi : B \to k[U, V]$ を$\Phi(X) = U^l$, $\Phi(Y) = U^mV^{l-m}$, $\Phi(Z) = U^nV^{l-n}$, $\Phi(W) = V^l$, となるものとして定め、$P(l, m, n) = \mathrm{Ker}\,\Phi$ とおく。B は重さ $\deg X = \deg Y = \deg Z = \deg W = 1$ の次数付き環とみなす。第一節で述べたように、$P(l, m, n)$ の生成系は $p(l, m, n)$ の Gröbner 基底を斉

次化することによって得られ、その Gröbner 基底は定義より $\mathrm{in}(p(l,m,n))$ の生成系によって与えられる。

以下、$p=p(l,m,n)$, $P=P(l,m,n)$ とおき $\mu(\mathrm{in}(p))=4$ と仮定する。前節で述べた命題 2.3, 系 2.5 により $\mu(\mathrm{in}(p))=4$ のとき、$\mathrm{in}(p)=(\mathrm{in}(F_v)\mid v=(1,0),(0,1),(1,1),(2,1))$ であるので p の Gröbner 基底は

$$\begin{array}{ll} F_{(1,0)}=Y^{b_2}Z^{c_1}-X^{a_1+a_2} & F_{(0,1)}=X^{a_2}Y^{b_1}-Z^{c_1+c_2} \\ F_{(1,1)}=Y^{b_1+b_2}-X^{a_1}Z^{c_2} & F_{(2,1)}=Y^{b_1+2b_2}-X^{2a_1+a_2}Z^{c_2-c_1} \end{array}$$

で与えられる。今、d_1 を $F_{(2,1)}$ の monomial の次数の差、つまり $d_1=(b_1+2b_2)-(2a_1+a_2)-(c_2-c_1)$ とおき、d_2 を $F_{(1,1)}$ の monomial の次数の差、つまり $d_2=(a_1+c_2)-(b_1+b_2)$ とおく。すると $d_1+d_2=(b_2+c_1)-(a_1+a_2)$, $d_1+2d_2=(c_1+c_2)-(a_2+b_1)$ となるので、環 A の元 $F_{(1,0)}$, $F_{(0,1)}$, $F_{(1,1)}$, $F_{(2,1)}$ は環 B 内に斉次化すると次の F_1, F_2, F_3, F_4 になり、これが P の生成系である。

$$\begin{array}{ll} F_1=Y^{b_2}Z^{c_1}-X^{a_1+a_2}W^{d_1+d_2} & F_2=X^{a_2}Y^{b_1}W^{d_1+2d_2}-Z^{c_1+c_2} \\ F_3=Y^{b_1+b_2}W^{d_2}-X^{a_1}Z^{c_2} & F_4=Y^{b_1+2b_2}-X^{2a_1+a_2}Z^{c_2-c_1}W^{d_1} \end{array}$$

これら F_1, F_2, F_3, F_4 はつぎの五つの関係式を持つことが確かめられる。

$$\begin{array}{l} Y^{b_2}F_3-W^{d_2}F_4+X^{a_1}Z^{c_2-c_1}F_1=0, \\ X^{a_1+a_2}W^{d_1}F_3-Z^{c_1}F_4+Y^{b_1+b_2}F_1=0, \\ Y^{b_2}F_2-W^{d_1+d_2}X^{a_2}F_3+Z^{c_2}F_1=0, \\ X^{a_1}F_2-Z^{c_1}F_3+Y^{b_1}W^{d_2}F_1=0, \\ -Y^{b_2}Z^{c_2-c_1}F_1^2-F_2F_3+X^{a_2}W^{d_1}F_3^2=0. \end{array}$$

$S=B[T_1,T_2,T_3,T_4]$ と $B[t]$ は多項式環とし、B-algebra map $\Psi: S\to B[t]$ を $\Psi(T_i)=F_i$ $(i=1,2,3,4)$ と定める。さらに、$\deg T_i=\deg F_i$, $\deg t=0$ と重さをいれ、Ψ が次数付き環準同型となるようにする。このとき $\mathrm{Im}\,\Psi=R(P)$ であり、また $J=\mathrm{Ker}\,\Psi$ と置くことにすれば J は次の五つの元を含むことが確かめられる。

$$\begin{array}{l} \xi_1=Y^{b_2}T_3-W^{d_2}T_4+X^{a_1}Z^{c_2-c_1}T_1, \\ \xi_2=X^{a_1+a_2}W^{d_1}T_3-Z^{c_1}T_4+Y^{b_1+b_2}T_1, \\ \xi_3=Y^{b_2}T_2-W^{d_1+d_2}X^{a_2}T_3+Z^{c_2}T_1, \\ \xi_4=X^{a_1}T_2-Z^{c_1}T_3+Y^{b_1}W^{d_2}T_1, \\ \xi_5=-Y^{b_2}Z^{c_2-c_1}T_1^2-T_2T_3+X^{a_2}W^{d_1}T_3^2. \end{array}$$

ここでイデアル $I\subset S$ を $I=(\xi_i\mid i=1,2,3,4,5)$ と置けば、次の補題が成り立つ。

補題 3.1 $IS[1/W]=JS[1/W]$, $IS[1/X]=JS[1/X]$ である。

証明 $IS[1/W] = JS[1/W]$ について。I, J は S の斉次イデアルなので $(IS[1/W])_0 = (JS[1/W])_0$ を示せばよい。また J は S の高さ 3 の素イデアルなので、$(JS[1/W])_0$ も高さ 3 の素イデアル。よって、$\mathrm{ht}(IS[1/W])_0 \geq 3$ を示せば充分である。$\deg T_i = \alpha_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, $\deg \xi_i = \beta_i$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ と置くことにする。すると、

$$
\begin{aligned}
(IS[1/W])_0 \ni \quad \xi_1/W^{\beta_1} &= (Y/W)^{b_2}(T_3/W^{\alpha_3}) - (T_4/W^{\alpha_4}) + (X/W)^{a_1}(Z/W)^{c_2-c_1}(T_1/W^{\alpha_1}) \\
\xi_3/W^{\beta_3} &= (Y/W)^{b_2}(T_2/W^{\alpha_2}) - (X/W)^{a_2}(T_3/W^{\alpha_3}) + (Z/W)^{c_2}(T_1/W^{\alpha_1}) \\
\xi_4/W^{\beta_4} &= (X/W)^{a_1}(T_2/W^{\alpha_2}) - (Z/W)^{c_1}(T_3/W^{\alpha_3}) + (Y/W)^{b_1}(T_1/W^{\alpha_1})
\end{aligned}
$$

となっている。

一般に $p = I_2\begin{pmatrix} x^{a_1} & y^{b_1} & z^{c_1} \\ y^{b_2} & z^{c_2} & x^{a_2} \end{pmatrix}$ の Rees 環 $R(p)$ について、$R(p) \cong \mathrm{Sym}(p) \cong k[x, y, z, t_1, t_2, t_3]/Q$ 但し、$Q = (x^{a_1}t_1 + y^{b_1}t_2 + z^{c_1}t_3, y^{b_2}t_1 + z^{c_2}t_2 + x^{a_2}t_3)$ と書けることから (cf. [3, Theorem 3.1]) 、$(\xi_1/W^{\beta_1}, \xi_3/W^{\beta_3}, \xi_4/W^{\beta_4})$ は $(S[1/W])_0$ の高さ 3 の素イデアルとなる。

$IS[1/X] = JS[1/X]$ についても同様に $\mathrm{ht}(IS[1/X])_0 \geq 3$ を示せばよい。今度は

$$
\begin{aligned}
(IS[1/X])_0 \ni \quad \xi_4/X^{\beta_4} &= (T_2/X^{\alpha_2}) - (Z/X)^{c_1}(T_3/X^{\alpha_3}) + (Y/X)^{b_1}(W/X)^{d_2}(T_1/X^{\alpha_1}) \\
\xi_1/X^{\beta_1} &= (Y/X)^{b_2}(T_3/X^{\alpha_3}) - (W/X)^{d_2}(T_4/X^{\alpha_4}) + (Z/X)^{c_2-c_1}(T_1/X^{\alpha_1}) \\
\xi_2/X^{\beta_2} &= (W/X)^{d_1}(T_3/X^{\alpha_3}) - (Z/X)^{c_1}(T_4/X^{\alpha_4}) + (Y/X)^{b_1+b_2}(T_1/X^{\alpha_1})
\end{aligned}
$$

となっている。$p' = I_2\begin{pmatrix} w^{d_1} & y^{b_1+b_2} & z^{c_1} \\ y^{b_2} & z^{c_2-c_1} & w^{d_2} \end{pmatrix}$ の Rees 環 $R(p')$ についても、$R(p') \cong \mathrm{Sym}(p')$ となることから結論が得られる。□

実は、イデアル I の生成系 $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_5$ は次の交代行列の 4 次の pfaffian となっていることが確かめられる。

$$
\begin{bmatrix}
0 & -T_2 & -Z^{c_2-c_1}T_1 & T_3 & W^{d_2} \\
T_2 & 0 & X^{a_2}W^{d_1}T_3 & -Y^{b_1}T_1 & -Z^{c_1} \\
Z^{c_2-c_1}T_1 & -X^{a_2}W^{d_1}T_3 & 0 & T_4 & Y^{b_2} \\
-T_3 & Y^{b_1}T_1 & -T_4 & 0 & X^{a_1} \\
-W^{d_2} & Z^{c_1} & -Y^{b_2} & -X^{a_2} & 0
\end{bmatrix}.
$$

定理 1.1 の証明 補題 3.2 より $J \in \mathrm{Min}\, S/I$ で $J = IS_J \cap S$ となっており、$\mathrm{Ass}\, S/I \ni Q \neq J$ ととれば、再び補題 3.2 より $Q \supset I + (X, W)$ であることがわかる。$a_1, d_2 > 0$ であること

に注意すれば

$$Q \supset \begin{pmatrix} Y^{b_2}T_3 \\ -Z^{c_1}T_4 + Y^{b_1+b_2}T_1 \\ Y^{b_2}T_2 + Z^{c_2}T_1 \\ -Z^{c_1}T_3 \\ -Y^{b_2}Z^{c_2-c_1}T_1^2 - T_2T_3 + X^{a_2}W^{d_1}T_3^2 \end{pmatrix} + (X, W)$$

であり、$\mathrm{ht}\, Q \geq 4$ となる。また、$\mathrm{ht}\, J = 3$ なので、$\mathrm{ht}\, I = 3$ を得る。故に、[1, Theorem 2.1] より、S/I は 5 次元 Gorenstein 環。しかしながら、もし本当に $\mathrm{Ass}\, S/I \ni Q \neq J$ となる素因子 Q が存在すれば $\mathrm{Ass}_S\, S/I = \mathrm{Assh}_S\, S/I$ なので $\dim S/Q = 5$ となり矛盾。このことは $I = J$ を意味する。□

参考文献

[1] D. A. Buchsbaum and D. Eisenbud, Algebra structures for finite free resolutions and some structure theorem for ideals of codimension 3, *Amer. J. Math.*, **99** (1977), 447-485.

[2] J. Herzog, Generators and relations of abelian semigroups and semigroups ring, *manuscripta math.*, **3** (1970), 175-193.

[3] C. Huneke, On the symmetric and Rees algebra of an ideal generated by a d-sequence, *J. Alg.*, **62** (1980), 268-275.

Department of Mathematics, Tokyo Metropolitan University, Minami-Ohsawa 1-1, Hachioji, Tokyo, 192-03, Japan